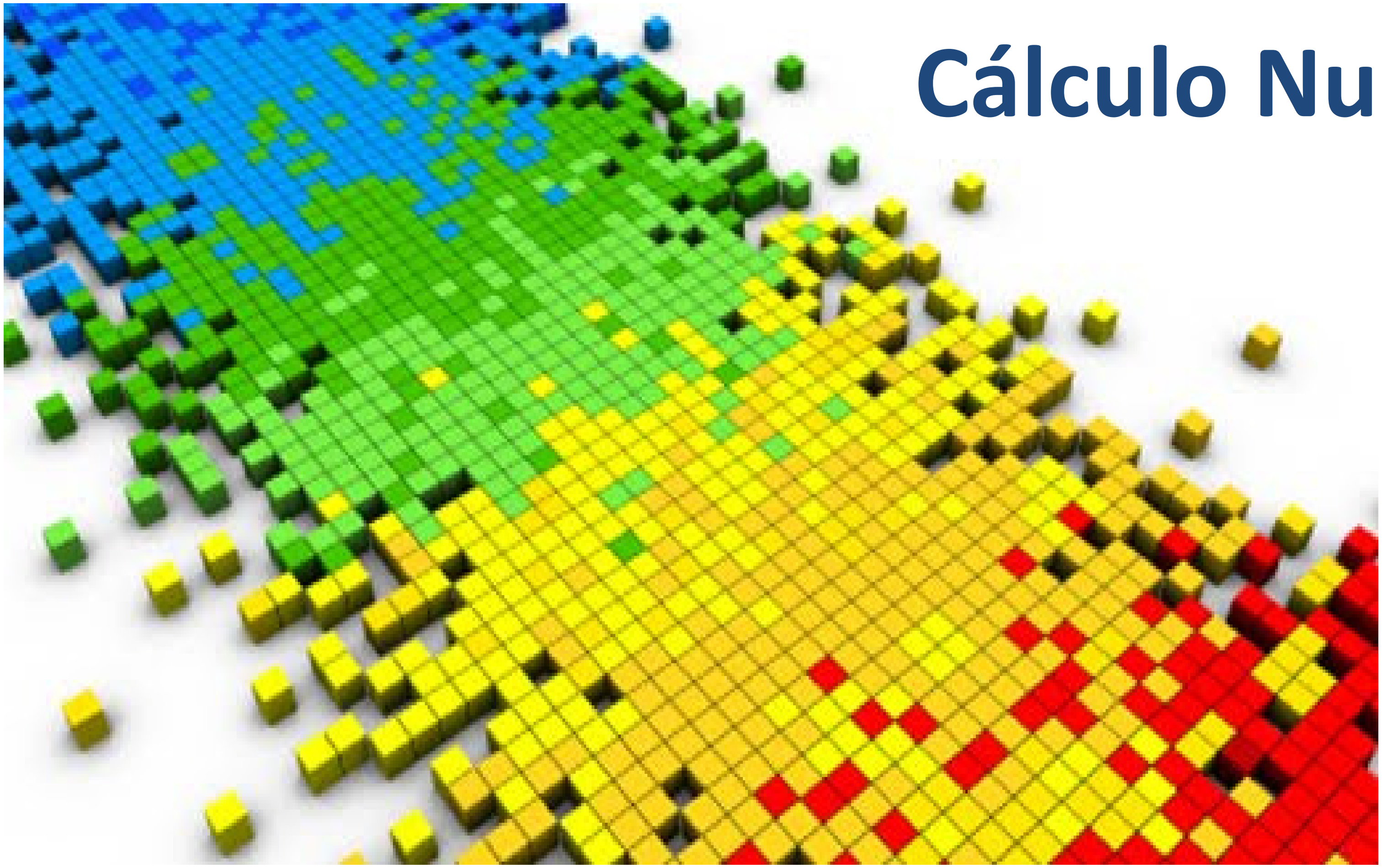

Cálculo Numérico

Aula 19 – Interpolação – Parte 2
Diferenças e Polinômio Interpolador de Newton

Prof. Guilherme Amorim

gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

2014.1 - 03/07/2014

O que vimos na última aula?

- Conceito de Interpolação
- Diferenças entre Interpolação e Ajustamento
- Como encontrar o polinômio interpolador através da resolução de um sistema de equações.
- Polinômio Interpolador de Lagrange

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \mathcal{L}_i^{(n)}(x)$$

onde $\mathcal{L}_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Inconveniente de Lagrange

"O método de Lagrange para determinação do polinômio de interpolação de uma função $y = f(x)$ sobre um conjunto de pontos $x0, x1, . . . , xn$ possui um inconveniente. Sempre que se deseja passar de um polinômio de grau p (construído sobre $p + 1$ pontos) para um polinômio de grau $p + 1$ (construído sobre $p + 2$ pontos) todo o trabalho tem que ser praticamente refeito. Seria interessante se houvesse possibilidade de, conhecido o polinômio de grau p, passar-se para o de grau $p + 1$ apenas acrescentando-se mais um termo ao de grau p." [4]

E hoje?

- Polinômio Interpolador de Newton

Polinômio Interpolador de Newton

- Dado o tabelamento

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

- Definimos o Polinômio Interpolador de Newton por:

$$\mathcal{P}_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\,f(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+ \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\,f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

- Mas quem são? $f(x_0)$ $\quad f(x_0, x_1)$ $\quad f(x_0, x_1, x_2)$ $\quad f(x_0, x_1, \dots, x_n)$

Diferença

- A diferença é um operador que serve de base para a definição do polinômio de Newton
- Temos duas formas mais comuns para a Diferença:
  - Diferença Dividida
  - Diferença Simples

Diferença Dividida (Definição 5.2)

Definição 5.2: (Diferenças Divididas). Dada uma função f como em (5.1), definimos as diferenças divididas,

$$f_0(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$f_r(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}) = \frac{f_{r-1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+r}) - f_{r-1}(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r-1})}{x_{i+r} - x_i}$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots, n.$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, (n-r).$$

Obs.: $f_r(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r})$ *lê-se diferença dividida de ordem* r, *relativa aos pontos* $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}$.

Tabela de Pontos Equidistantes (Definição 5.3)

Definição 5.3: (Tabela de pontos eqüidistantes). Dada uma tabela $(x_i ; f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ diz-se que ela é de pontos eqüidistantes, se $x_{i+1} - x_i = h$ (constante) $i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

- Exemplo:

x_i	3	3,5	4
$ln\, x_i$	1,099	1,253	1,386

Diferença Simples (Definição 5.4)

Definição 5.4: (Diferenças Simples). Dada uma função f como em (5.1), por uma tabela de pontos eqüidistantes, definimos

$$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$\Delta^r f(x_i) = \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i), \quad r = 1, 2, \ldots, n. \quad i = 0, 1, 2, \ldots, (n - r).$$

Obs.: 1 - $\Delta^r f(x_i)$ Lê-se diferenças simples de ordem r de $f(x_i)$.

2 - Note que tanto as diferenças divididas quanto as diferenças simples estão definidas de forma recursiva.

Exemplo 5.3

- Determine todas as diferenças simples e divididas relativas à tabela

x_i	3	3,5	4
$ln\ x_i$	1,099	1,253	1,386

- Solução:
  - Verificar se a tabela é de pontos equidistantes.

Facilmente, se tem que $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h = 0{,}5$, logo se pode construir a tabela com todas as diferenças simples requeridas.

Exemplo 5.3

- Solução (cont.):

A partir da Definição 5.4 tem-se:

$$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0) = 1{,}253 - \overset{1{,}099}{\cancel{1{,}009}} = \overset{0{,}154}{\cancel{0{,}244}}$$

$$\Delta^1 f(x_1) = \Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1) = 1{,}386 - 1{,}253 = 0{,}133$$

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0) = 0{,}133 - \overset{0{,}154}{\cancel{0{,}244}} = -\overset{-0{,}021}{\cancel{0{,}111}}$$

i	x_i	$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$	$\Delta^1 f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
0	3,0	~~1,009~~ **1,099**	~~0,244~~ **0,154**	- ~~0,111~~ **-0,021**
1	3,5	1,253	0,133	
2	4,0	1,386		

Exemplo 5.3

- Solução (cont.):

Para o caso das diferenças divididas obtém-se:

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f_0(x_1) - f_0(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1{,}253 - \overset{1{,}099}{\cancel{1{,}009}}}{3{,}5 - 3{,}0} = \overset{0{,}308}{\cancel{0{,}488}}$$

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{f_0(x_2) - f_0(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}386 - 1{,}253}{4{,}0 - 3{,}5} = 0{,}266$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{f_1(x_1, x_2) - f_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{0{,}266 - \overset{0{,}308}{\cancel{0{,}488}}}{4{,}0 - 3{,}0} = -\overset{-0{,}042}{\cancel{0{,}222}}$$

i	x_i	$f_0(x_i) = f(x_i)$	$f_1(x_i, x_{i+1})$	$f_2(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
0	3,0	~~1,009~~ **1,099**	~~0,488~~ **0,308**	~~- 0,222~~ **-0,042**
1	3,5	1,253	0,266	
2	4,0	1,386		

Propriedades das Diferenças (Prop. 1)

- Propriedade 1: Em tabelas de pontos equidistantes, temos seguinte a relação entre diferenças divididas e diferenças simples:

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 1)

- Prova por Indução:
  - Para o caso de n=1:

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f_0(x_1) - f_0(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)}{h} = \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\, h^1}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 1)

- Prova por Indução:

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0} =$$

  - Se a proposição é verdadeira para (n-1), então ela é verdadeira para n.

$$= \left(\frac{\Delta^{n-1} f(x_1)}{(n-1)!\, h^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f(x_0)}{(n-1)!\, h^{n-1}} \right) / nh \quad = \frac{\Delta^{n} f(x_0)}{n!\, h^{n}}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 2)

- Propriedade 2: As diferenças divididas também podem ser escritas como:

$$f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k)}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 2)

- Prova por indução:
  - Para o caso n=1:

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f_0(x_1) - f_0(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \sum_{j=0}^{1} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{1} \left(x_j - x_k\right)}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 2)

- Indução:
  - Se a proposição é verdadeira para (n-1), então ela é verdadeira para n.

$$f_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$$

$$f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \Downarrow \qquad f_{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} (x_j - x_k)} \right] \frac{1}{x_n - x_0}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 2)

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x_j-x_k)}-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}(x_j-x_k)}\right]\frac{1}{x_n-x_0}$$

$$= \overset{1}{\frac{f(x_0)}{x_0-x_n\prod_{k=1}^{n-1}x_0-x_k}} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{x_n-x_0}\cdot\frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}(x_j-x_k)}\left[\overset{2}{\frac{1}{x_j-x_n}}-\overset{3}{\frac{1}{x_j-x_0}}\right]+$$

$$\overset{4}{+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\prod_{k=1}^{n-1}(x_n-x_k)}}$$

1. Termo referente ao segundo somatório quando j=0, multiplicado por 1/(xn-x0)
2. Termo referente ao produtório do primeiro somatório
3. Termo referente ao produtório do segundo somatório
4. Termo referente ao primeiro somatório quando j=n, multiplicado por 1/(xn-x0)

Propriedades das Diferenças (Prop. 2)

- Mas..

$$\frac{1}{x_n - x_0}\left[\frac{1}{x_j - x_n} - \frac{1}{x_j - x_0}\right] = \frac{1}{x_n - x_0}\left[\frac{x_j - x_0 - x_j + x_n}{(x_j - x_n)(x_j - x_0)}\right]$$

$$= \frac{1}{(x_j - x_n)(x_j - x_0)}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 2)

- Assim..

$$f_n(x_0,\dots,x_n) = \frac{f(x_0)}{\underbrace{\prod_{k=1}^{n}(x_0 - x_k)}_{1}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\underbrace{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)}_{2}} + \frac{f(x_n)}{\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}(x_n - x_k)}_{3}}$$

1. Notar que o termo (x0-xn) entrou no produtório
2. Notar que os termos (xj-xn)(xj-x0) entraram no produtório
3. Notar que o termo (xn-x0) entrou no produtório.

$$\Rightarrow \quad f_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)}$$

Propriedades das Diferenças (Prop. 3)

Propriedade 3. Na diferença $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a ordem dos argumentos é irrelevante.

Este resultado é uma conseqüência imediata da propriedade anterior. Logo, por exemplo,

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = f_2(x_2, x_1, x_0) = f_2(x_0, x_2, x_1) = \ldots$$

Obs.: Como a ordem da diferença dividida é sempre igual a quantidade de argumentos menos um, é comum não explicitá-la.

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_2, x_1, x_0) = f(x_0, x_2, x_1) = \ldots$$

Bibliografia

- **[1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.**
- **[2] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.**
- **[3] Kiusalaas, Jaan; Numerical Methods in Engineering with Python. 2ª edição. 2010.**
- **[4] Cuminato, José Alberto. Apostila USP.** http://www.ceunes.ufes.br/downloads/2/riedsonb-Apostila%20-%20Cuminato.pdf